Теорема об изменении кинетической энергии точки

Пример 1. Тело, имеющее силу тяжести P, падает без начальной скорости на пружину с высоты h. Определить наибольшее обжатие пружины λ, если статическое сжатие ее под действием силы тяжести этого тела равно $\lambda_{ст}$. Массой пружины пренебречь (рис. 67).

Решение. Применим к движению тела теорему об изменении кинетической энергии точки

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A,$$

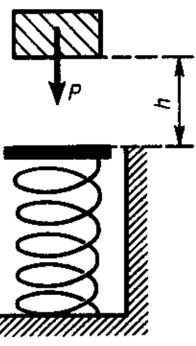

Рис. 67

приняв за начальное положение тела начало его падения с высоты h, а за конечное — момент максимального обжатия пружины. Изменение кинетической энергии за этот промежуток времени равно нулю, так как $v_0 = 0$ и при наибольшем сжатии пружины $v = 0$. Следовательно, работа $A = 0$. На тело после его соприкосновения с пружиной действуют две силы: сила тяжести тела $\bar{P}$ и сила упругости пружины. Сила $\bar{P}$ совершает работу на перемещении $(h+\lambda)$, сила упругости — на перемещении λ. Следовательно,

$$A = P(h+\lambda) - \frac{c}{2}\lambda^2 = 0.$$

337

Но так как в положении статического равновесия $P = c\lambda_{ст}$, то $c = P/\lambda_{ст}$. Поэтому

$$h + \lambda - \frac{1}{2\lambda_{ст}}\lambda^2 = 0, \quad \text{или}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda_{ст}\lambda - 2\lambda_{ст}h = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, имеем

$$\lambda = \lambda_{ст} + \sqrt{\lambda_{ст}^2 + 2\lambda_{ст}h}.$$

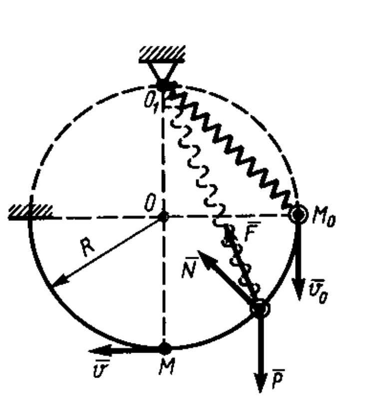

Рис. 68

Знак плюс перед корнем выбран потому, что $\lambda > \lambda_{ст}$. При $h = 0$ наибольшее обжатие пружины $\lambda = 2\lambda_{ст}$, т. е. при динамическом действии груза на пружину ее наибольшее обжатие в два раза больше статического обжатия.

Пример 2. Грузу с силой тяжести P, подвешенному в точке O_1 на пружине, статическое удлинение которой под действием силы тяжести P равно $\lambda_{ст}$, сообщена начальная скорость $\bar{v}_0$ из положения M_0 вертикально вниз (рис. 68).

Определить скорость груза в положении M, если груз, принимаемый за точку, скользит по кольцу радиусом R без трения, $OO_1 = R$ и естественная длина пружины равна R.

Решение. Применим к движению груза теорему об изменении кинетической энергии, приняв за начальное положение груза M_0 и конечное — M. Получим

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{2} - \frac{P}{g}\frac{v_0^2}{2} = A.$$

Работу совершают сила тяжести груза и сила упругости пружины. Нормальная реакция кольца $\bar{N}$ все время перпендикулярна перемещению, и ее работа равна нулю. Следовательно,

$$A = Ph - \frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2) = Ph - \frac{P}{2\lambda_{ст}}(r_1^2 - r_0^2).$$

В рассматриваемом случае

$$h = R; \quad r_0 = R\sqrt{2} - R; \quad r_1 = 2R - R = R,$$

поэтому

$$A = PR - \frac{P}{2\lambda_{ст}}\left[R^2 - R^2(\sqrt{2}-1)^2\right] = PR\left[1 - \frac{R}{\lambda_{ст}}(\sqrt{2}-1)\right].$$

По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{2} - \frac{P}{g}\frac{v_0^2}{2} = PR\left[1 - \frac{(\sqrt{2}-1)R}{\lambda_{ст}}\right]$$

и

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR\left[1 - \frac{(\sqrt{2}-1)R}{\lambda_{ст}}\right]}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы

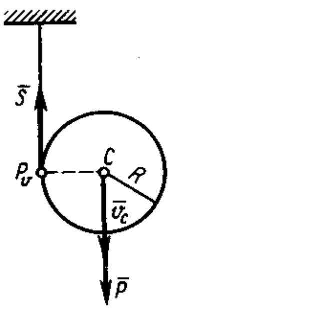

Рис. 69

Пример 1. В маятнике Максвелла однородный цилиндр силой тяжести P и радиусом R падает вниз без начальной скорости, разматывая нить, намотанную на цилиндр в его среднем сечении.

Определить скорость оси цилиндра в зависимости от высоты ее опускания h (рис. 69).

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии цилиндра как твердого тела имеем

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^{(e)}.$$

Так как в начальный момент времени цилиндр покоится, то $T_0 = 0$. Цилиндр совершает плоское движение. Его кинетическая энергия в момент достижения высоты h

$$T = \frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2} + J_{Cz}\frac{\omega^2}{2}; \quad J_{Cz} = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}; \quad v_C = R\omega.$$

Поэтому

$$T = \frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2} + \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}\frac{v_C^2}{2R^2} = \frac{3}{4}\frac{P}{g}v_C^2.$$

Внешними силами являются сила тяжести $\bar{P}$ и сила натяжения нити $\bar{S}$. Сила $\bar{S}$ все время приложена в мгновенном центре скоростей цилиндра, имеющем скорость равную нулю. Работа силы тоже равна нулю. Следовательно,

$$\sum A_k^{(e)} = Ph.$$

Подставляя вычисленные величины в теорему об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{3}{4}\frac{P}{g}v_C^2 = Ph; \quad v_C = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}.$$

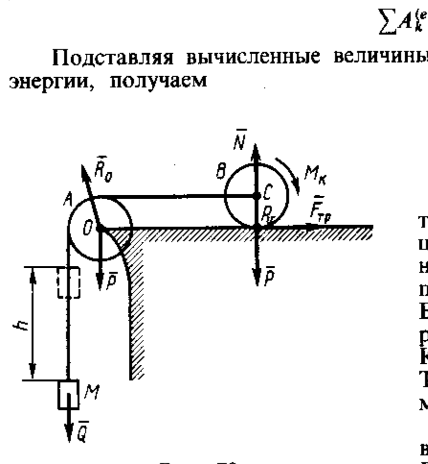

Рис. 70

Пример 2. Груз M, имеющий силу тяжести Q, с помощью нити, переброшенной через блок A, приводит в движение каток B, катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 70). Блок A и каток B — однородные диски радиусом R. Их силы тяжести равны P. Коэффициент трения качения катка k. Трением в осях катка и блока, а также массой нити пренебречь.

Определить скорость груза M в зависимости от его высоты опускания. В начальный момент система покоится.

340

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии системы, состоящей из груза, нити, блока и катка, имеем

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)},$$

где $T_0 = 0$, так как вначале система покоилась. Обозначив T_1, T_2 и T_3 кинетические энергии груза, блока и катка соответственно после опускания груза на высоту h, получаем

$$T_1 = \frac{Q}{g}\frac{v^2}{2}; \quad T_2 = J_{Oz}\frac{\omega_A^2}{2}; \quad T_3 = \frac{P}{g}\frac{v_C^2}{2} + J_{Cz}\frac{\omega_B^2}{2}.$$

Но

$$J_{Oz} = J_{Cz} = \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}; \quad \omega_A = \frac{v}{R}; \quad v_C = v; \quad \omega_B = \frac{v_C}{R} = \frac{v}{R}.$$

Следовательно,

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{v^2}{4g}(2Q + 3P + P) = \frac{v^2}{2g}(Q + 2P).$$

Так как работа внутренних сил натяжений нити равна нулю, то вообще $\sum A_k^{(i)} = 0$ для всей системы твердых тел, соединенных нитью. Работа сил тяжести блока и реакции оси $\bar{R}_0$ равны нулю, так как эти силы приложены в неподвижной точке O. Сила тяжести катка $\bar{P}$ перпендикулярна перемещению, а силы $\bar{N}$ и $\bar{F}_{тр}$ приложены в мгновенном центре скоростей и, следовательно, работа их равна нулю. Работу производят сила $\bar{Q}$ и пара сил с моментом M_k, препятствующим качению катка по плоскости. Имеем

$$\sum A_k^{(e)} = Qh - M_k\varphi,$$

где φ — угол поворота катка при опускании груза M на h и $M_k = \text{const}$.

Так как

$$M_k = kN = kP = \text{const}, \quad \varphi = h/R,$$

то

$$\sum A_k^{(e)} = Qh - kP\frac{h}{R}.$$

Подставляя значения полученных величин в теорему об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{v^2}{2g}(Q + 2P) = h\left(Q - \frac{k}{R}P\right); \quad v = \sqrt{\frac{2gh\left(Q - \frac{k}{R}P\right)}{Q + 2P}}.$$

Заметим, что груз имеет не только силу тяжести $\bar{Q}$, совершающую работу, но он еще обладает массой Q/g и, следовательно, имеет кинетическую энергию. И работа силы тяжести, и кинетическая энергия груза входят в теорему об изменении кинетической энергии.